УДК 512.552.1

НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ДИСТРИБУТОВНО МОДУЛЬНОГО ТИПУ

Ю. В. Яременко

Доведено, що напівдосконалі кільця дистрибутивно модульного типу є бірядними кільцями.

We prove that any noetherian semi–perfect ring of distributive module type is biserial.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1\neq 0$.

Важливу роль в теорії кілець і модулів відіграють різноманітні умови скінченності, зокрема, умови обриву ланцюжків підмодулів та односторонніх ідеалів.

Нагадаємо, що модуль M називається *нетеровим (артиновим)*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний (мінімальний) елемент.

Кільце A називається *артиновим (нетеровим) справа*, якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

Кільце цілих чисел являється, очевидно, нетеровим, але не артиновим.

Радикалом Джекобсона R кільця A називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів [1].

Кільце A називається *напівдосконалим*, якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R кільця A [2].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R, якщо для будь-якого елемента $u\in A$, для якого $u^2-u\in R$ існує елемент $e^2=e\in A$ такий, що $e-u\in R$ (тобто існує ідемпотент e в кільці A конгруентний з елементом u за модулем R).

Теорема 1 [2]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли* $1\in A$ *розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=$ $=\sum_{i,j=1}^{n}e_iae_j$. Неважко перевірити, що це розклад кільця A в пряму суму абелевих груп e_iAe_j $(i,j=1,\ldots,n)$. Елементи із e_iAe_j ми будемо позначати через a_{ij}. Будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}). Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A*.

Артинові бірядні кільця ввів Фуллер [3] в зв'язку з вивченням кілець дистрибутивного модульного типу. В роботі [4] поняття бірядного кільця перенесено на напівдосконалі кільця.

Модуль M називається *дистрибутивним*, якщо для будь-яких його підмодулів K, L, N виконується умова: $K\cap(L+N)=K\cap L+K\cap N$.

Ясно, що підмодулі та фактор модулі дистрибутивного модуля також дистрибутивні.

Модуль називається *напівдистрибутивним,* якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів.

Ненульовий модуль M називається *простим*, якщо у нього рівно два підмодулі (сам M і нульовий підмодуль).

Модуль M називається *бірядним*, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1 + K_2 = M$, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_1 \cap K_2$ – нуль, або простий модуль [4].

Напівдосконале кільце A називається *бірядним кільцем*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A модуль бірядний [4].

Теорема 2 [4]. *Нехай e – довільний ідемпотент бірядного кільця A. Тоді eAe являється бірядним кільцем.*

Теорема 3 [5,с.281]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли воно розпадається в пряму суму правих ідеалів, кожен з яких має рівно один максимальний підмодуль.*

Напівдосконале кільце A з радикалом Джекобсона R називається *зведеним,* якщо A/R є прямим добутком тіл.

Модуль P називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму φ модуля M на модуль N $(\varphi: M \to N)$ і для будь-якого гомоморфізму $\psi: P \to N$ існує гомоморфізм $h: P \to M$ такий, що $\psi = \varphi h$ [6,с.132].

Підмодуль N модуля M називається *косуттєвим*, якщо з рівності $N+X=M$ слідує, що $X=M$ для довільного підмодуля X модуля M.

Проективний модуль $P=P(M)$ називається *проективним накриттям* модуля M, якщо існує епіморфізм $\varphi: P \to M$ такий, що $Ker\ \varphi$ - косуттєвий підмодуль в P.

За теоремою Моріти [7] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем натурально-еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при вивченні напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це означає, що в розкладі напівдосконалого кільця A в пряму суму головних A-модулів немає ізоморфних. Отже, кільце A розкладатиметься в пряму суму нерозкладних проективних модулів: $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона R. $P_1,\dots,P_s$ – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні A модулі. Позначимо $P(P_iR)$ – проективне накриття модуля (P_iR). Тоді $P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad i,j = 1,\dots,s$. Поставимо у відповідність модулям $P_1,\dots,P_s$ точки $1,\dots,s$ і сполучимо точку i з точкою j t_{ij} – стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* (позначається $Q(A)$) нетерова справа напівдосконалого кільця A [8].

Аналогічно визначається лівий сагайдак $Q'(A)$ нетерового зліва напівдосконалого кільця A.

Відмітимо, що сагайдак напівдосконалого кільця не змінюється при переході до кілець, еквівалентних в сенсі Моріти. Очевидно, також, що $Q(A)=Q(A/R^2)$.

Модуль M називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів лінійно впорядкована.

Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем.*

Кільце A називається *напівланцюговим*, якщо воно являється напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

Модуль M називається *скінченно зображуваним*, якщо існує точна послідовність $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$, де P_1 і P_0 скінченнопороджені модулі.

Напівдосконале кільце A називається кільцем *дистрибутивно модульного типу*, якщо довільний правий скінченно зображуваний А-модуль напівдистрибутивний, тобто пряма сума дистрибутивних модулів.

Важливим прикладом кілець дистрибутивно модульного типу являються напівланцюгові кільця.

Отже, для того, щоб показати скінченну зображуваність модуля M над напівдосконалим кільцем, потрібно перевірити скінченнопородженість модуля M і скінченнопородженість модуля $Ker\Pi$, де Π – епіморфізм проективного накриття $P(M)$ модуля M на M.

Теорема 4 [9]. *Нехай А кільце дистрибутивно модульного типу.* $e^2=e\in A$. *Тоді кільце eAe також є кільцем дистрибутивно модульного типу.*

Нехай A – напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу,

$1 = e_1 + \ldots + e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_iAe_j$, $(i,j = 1, \ldots, n)$.

Теорема 5 [9]. *Нехай А – напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу. Тоді* A_{ij} *є лівим ланцюговим* A_{ii} *– модулем і правим ланцюговим* A_{jj} *– модулем* $(i,j = 1, \ldots, n)$.

Для нетерових (артинових) кілець має місце теорема:

Теорема 6 [8]. *Якщо кільце А нетерове (артинове) справа, то кільце eAe і fAf - нетерові, (артинові) справа, fAf – модуль eAf та eAe – модуль fAe – скінченнопороджені. Навпаки, якщо ці умови виконані для деяких ідемпотентів* $e, f\in A$ *таких, що* $e+f=1$, *то кільце А – нетерове (артинове) справа.*

Кільце називається *напівдистрибутивним справа (зліва),* якщо воно, розглянуте як правий (лівий) модуль над собою, є напівдистрибутивним.

Кільце, яке напівдистрибутивне справа і зліва називають *напівдистрибутивним.*

Враховуючи теорему 6, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце – напівдистрибутивне.*

Кільце A називається *локальним*, якщо у нього всього один максимальний правий ідеал.

В цьому випадку цей ідеал є радикалом Джекобсона R кільця A. Тому у кільця A всього один максимальний лівий ідеал.

З наслідка 1 і теорем 4 та 6 одержуємо наступне твердження.

Твердження 1. *Локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим.*

Слідуючи роботі [10] *мінором n-го порядку* кільця A називаємо кільце B ендоморфізмів скінченнопородженного проективного A-модуля, який може бути розкладений в пряму суму n нерозкладних модулів. З теореми 4 випливає наступний результат.

Твердження 2. *Будь-який мінор нетерового напівдосконалого кільця дистрибутивно модульного типу є нетеровим напівдосконалим кільцем дистрибутивно модульного типу.*

Згідно твердження 1 локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим. Отже:

Наслідок 2 [8]. *Нетерове ланцюгове кільце A є дискретно нормованим кільцем (можливо некомутативним) або однорядним кільцем Кете, тобто ланцюговим артиновим кільцем.*

Лема 1 [11]. *Якщо A – нетерове напівдосконале напівдистрибутивне кільце,* $1=e_1+\ldots+e_n$ *– розклад* $1\in A$ *в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів,* $A_{ij}=e_iAe_j$, R_i *– радикал Джекобсона кільця* A_{ii}, *то* $R_iA_{ij}=A_{ij}R_j$ *для всіх* $i, j=1,\ldots,n$.

Ідеал J кільця A називається *первинним*, якщо $J\neq A$ і для будь-яких ідеалів L і N кільця A з включення $LN\subset J$ випливає, що або $L\subset J$, або $N\subset J$.

Первинним радикалом I кільця A називається перетин усіх первинних ідеалів кільця A [12,с.399].

Кільце A називається *первинним*, якщо добуток будь-яких двох ненульових ідеалів не рівний нулю.

Введемо поняття первинного сагайдака напівдосконалого кільця.

Нехай $\bar{1}=\overline{f_1}+\ldots+\overline{f_t}$ – розклад одиниці кільця $\bar{A}$ в суму взаємно ортогональних ідемпотентів. Позначимо $V=I/I^2$. Поставимо у відповідність точкам $1,\ldots,t$ ідемпотенти $\overline{f_1},\ldots,\overline{f_t}$ та проведемо стрілку з точки i в точку j, якщо $\overline{f_i}V\overline{f_j}\neq 0$. Отриманий граф називається *первинним сагайдаком* кільця A.

В роботах [9,13] описано зведені мінори другого і третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу, які використовуються при доведенні теореми:

Теорема 7. *Нетерове напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу – бірядне.*

Доведення. Розглянемо I – первинний радикал нетерового напівдосконалого дистрибутивно модульного типу кільця A. Тоді

$\bar{A}=A/I=\bar{A}_1\times\ldots\times\bar{A}_t$ – прямий добутком первинних кілець, які еквівалентні в сенсі Моріті або тілу D, або дискретно нормованому кільцю $H_S(\vartheta)$.

Вагою точки i первинного сагайдака називається кільце ендоморфізмів нерозкладного прективного $\bar{A}_i$-модуля тобто вага у нашому випадку може бути D або $H_S(\vartheta)$.

Якщо вага буде тільки D, то кільце A артинове і теорема доведена Колбі та Фулером [14].

Занумеруємо всі точки первинного сагайдака кільця A в такому порядку, щоб першими були точки з вагою $H_S(\vartheta)$: $1,\ldots,m$, а вага точок $m+1,\ldots,t$ була D (може бути, що $m=t$). Причому нумеруємо точки, вага яких є тілом D наступним чином:

1) першими будуть точки з $R_k^2\neq 0$,

2) далі йдуть точки з $R_k^2=0$, але $R_k\neq 0$,

3) $R_k=0$.

Отримаємо двосторонній пірсовський розклад кільця A:

$$A=\begin{pmatrix} H & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & B_3 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & B_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & B_1 \end{pmatrix}.$$

Кільце H відповідає точкам з вагою $H_S(\vartheta)$, тобто m першим точкам. Воно буде мати двостороній пірсовський розклад:

$$H=\begin{pmatrix} H_{S_1} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & H_{S_2} & \ldots & A_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & H_{S_m} \end{pmatrix}.$$

Із опису мінорів другого порядку отримаємо лему:

Лема 2. *Нехай e та f -локальні ідемпотенти кільця A і* $eAf\subseteq I$. *Тоді eAf є або нулем або одновимірним правим векторним простором над тілом ендоморфізмів правого простого модуля, який відповідає ідемпотенту f та або нулем або одновимірним лівим векторним простором над тілом ендоморфізмів лівого простого модуля, який відповідає ідемпотенту e.*

Теорема 8 [11]. *Тіла ендоморфізмів всіх простих модулів над нетеровими нерозкладними напівдосконалими напівдистрибутивними кільцями ізоморфні між собою.*

Враховуючи теорему 8, отримаємо наслідок

Наслідок 3. *Всі компоненти* A_{ij} *в двосторонньому пірсовському розкладі кільця H є скінченновимірними векторними просторами.*

Крім того, легко показати, що первинний сагайдак кільця H не містить орієнтованих циклів. В іншому випадку вага, по крайній мірі однієї точки в цьому циклі, була б тілом D. Таким чином, кільце Н має верхній трикутний вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} H_{S_1} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & H_{S_2} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_{S_m} \end{pmatrix}.$$

З опису мінорів другого та третього порядку слідує, що існує $\kappa \in N$, таке, що $A_{ij}R_j^k = R_i^k A_{ij} = 0$, де R_i – радикал Джекобсона кільця H_{S_i} $(i = 1 \dots m)$. Аналогічно, для кілець B_3, B_2, B_1 виконується умова $A_{ij}R_j^k = R_i A_{ij}^k = 0$. Отже, двосторонній пірсовський розклад нетерового напівдосконалого кільця дистрибутивно модульного типу має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} H_{S_1} & A_{1,2} \dots & A_{1,m} & A_{1,m+1} & A_{1,m+2} & A_{1,m+3} \\ 0 & H_{S_2} \dots & A_{2,m} & A_{2,m+1} & A_{2,m+2} & A_{2,m+3} \\ \dots & \dots\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\ 0 & H_{S_m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & A_{m,m+3} \\ A_{m+1,1} & \dots\ \dots & A_{m+1,m} & B_3 & A_{m+1,m+2} & A_{m+1,m+3} \\ A_{m+2,1} & \dots\ \dots & A_{m+2,m} & A_{m+2,m+1} & B_2 & A_{m+2,m+3} \\ A_{m+3,1} & \dots\ \dots & A_{m+3,m} & A_{m+3,m+1} & A_{m+3,m+2} & B_1 \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} R_j^k = R_i^k A_{ij} = 0$.

Розглянемо множину:

$$I_n = \begin{pmatrix} R_1^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_m^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що I_n є двостороннім ідеалом кільця A для кожного $n \geq k$. Отже, факторкільце $A_n = A/I_n$ є артиновим кільцем дистрибутивно модульного типу, яке є бірядним за теоремою Колбі–Фуллера [14] для кожного натурального номера $n \geq k$.

Покажемо, що будь-який нерозкладний проективний A–модуль є бірядним. Розглянемо, наприклад, модуль $P_1=(\vartheta, \vartheta, \dots, \vartheta, A_{12}, \dots, A_{1m+3})$. Його найбільший підмодуль $P_1R=(\mu, \vartheta, \dots, \vartheta, A_{12}, \dots, A_{1m+3})$. Зрозуміло, що $K_1=(\mu, \vartheta, \dots, \vartheta, 0, \dots, 0)$ є ланцюговим модулем кільця A. Ланцюговим буде і A_n-модуль $V_n=K_1/K_1R_1^n$ $(n\in N)$, всі фактори якого вичерпуються простими модулями $U_1,\dots,U_{s1}$ [8]. Позначимо $K_2=(0, \dots, 0, A_{12}, \dots, A_{1m+3})$. Він буде артиновим за лемою 2 та є A_n-модулем для кожного натурального номера $n \geq k$.

Нехай $P_1^{(n)}$ – перший нерозкладний проективний A_n–модуль. Так як A_n – бірядне кільце, то єдиний максимальний підмодуль в $P_1^{(n)}$ має вигляд $K_1^{(n)}+K_2^{(n)}$, де $K_i^{(n)}$ $(i=1,2)$ – ланцюгові модулі.

Так як $P_1^{(n)}$ дистрибутивний модуль, то $(K_1^{(n)}+K_2^{(n)})\cap V_n=K_1^{(n)}\cap V_n+K_2^{(n)}\cap V_n$, і $(K_1^{(n)}+K_2^{(n)})\cap K_2=K_1^{(n)}\cap K_2+K_2^{(n)}\cap K_2$

В композиційному ряді модуля K_2 немає фактормодулів ізоморфних $U_1,\dots,U_{s1}$. З попередніх рівностей слідує, що $K_1^{(n)}\cap V_n$ та $K_2^{(n)}\cap V_n$ є підмодулі ланцюгового модуля V_n, тому можна вважати, що $K_1^{(n)}\cap V_n \supseteq K_2^{(n)} \cap V_n$, тобто $V_n=K_1^{(n)}\cap V_n$ та $V_n \subseteq K_1^{(n)}$. Ми одержали, що цоколь модуля $K_1^{(n)}$ співпадає з цоколем модуля V_n і рівний прямій сумі простих модулів $U_1,\dots,U_{s1}$.

В розклад цоколя модуля K_2 входять прості модулі $U_{s1+1},\dots,U_{m+3}$. Нехай модулі $K_1^{(n)}\cap K_2$ та $K_1^{(n)}\cap K_2$ є одночасно ненульовими. Так як цоколь $K_1^{(n)}$ містить принаймні один з простих модулів U_k $(k=1,\dots, s_1)$, отримаємо, що і K_2 містить цей модуль. Прийшли до протиріччя.Отже, $K_1^{(n)}\cap K_2=0$ і $K_2^{(n)}\cap K_2=K_2$, тобто K_2–ланцюговий модуль як підмодуль ланцюгового модуля $K_2^{(n)}$. Тому $P_1R=(\mu, \vartheta, \dots, \vartheta, 0, \dots, 0)\oplus(0, \dots, 0, A_{12}, \dots, A_{1m+3})=K_1\oplus K_2$.

Аналогічно доводиться, що будь-який нерозкладний проективний A-модуль – бірядний. Відмітимо, що нерозкладні проективні праві A-модулі P_{m+1}, P_{m+2}, P_{m+3} та ліві $Q_{m+1}, Q_{m+2}, Q_{m+3}$ є бірядними автоматично, так як вони являються і A_n-модулями. Теорема 7 доведена.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Джекобсон Н. Теория колец. – М.: ИЛ, 1947. – 288 с.
2. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
3. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
4. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
5. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
6. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.
7. Morita K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 1958. – V. 6. – P. 83-142.
8. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.

9. Яременко Ю.В. Мінори нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 1998. - №2. – С. 159-168.
10. Drozd Yu. A. Minors and reduction theorems // Coll Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – V. 6. – P. 173-176.
11. Кириченко В.В., Хибина М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики, 1993. – С. 457-480.
12. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. – М.: Мир, 1979. – Т. 2. – 464 с.
13. Yaremenko Yu.V. Noetherian semiperfekt rings of distributive module type // Mathematychni Studii. – 1997. – V. 8, №1. – P. 3-10.
14. Colby R.R., Fuller K.R. Modules over diserial rings // Comm. In Algebra. – 1981. – № 9. – P. 511-532.